

von Mises の降伏条件に基づく弾塑性解析に対する  
2次錐計画法

米倉 一男    寒野 善博

September 16, 2011

日本応用数理学会 2011 年度年会

- Nonsmooth mechanics (非滑力学)
  - 場合分けを含む力学現象を上手く扱う方法論
  - ある基準を境に支配法則が切り替わる
  
- 相補性条件
  - 場合分けを“隠す”条件
  - 最適化問題の最適性条件

- Nonsmooth mechanics (非滑力学)
  - 場合分けを含む力学現象を上手く扱う方法論
  - ある基準を境に支配法則が切り替わる
    - 接触 / 離間 (境界条件の変化)
    - 可逆変形 / 不可逆変形 (エネルギー保存則の変化)
    - 亀裂が開く / 閉じる (材料の状態の変化)
- 相補性条件
  - 場合分けを“隠す”条件
  - 最適化問題の最適性条件
- → von Mises の弾塑性則の新しい定式化

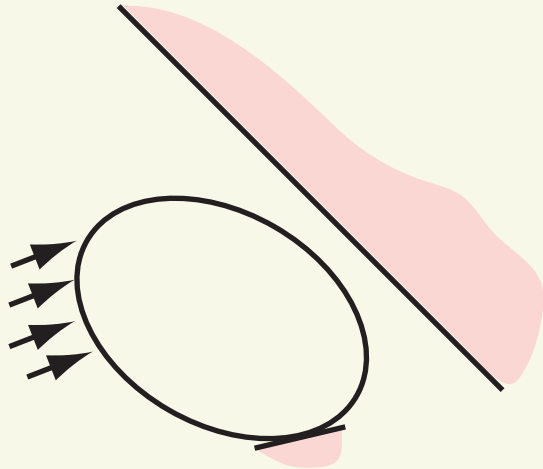
# 弾塑性問題

- Return-mapping [Simo & Taylor 85, 86]
- 数理計画法
  - 降伏条件を多面体で近似  
→ 凸2次計画問題 [Mier 68, 69] [Capurso & Maier 70]
  - 拡張 Lagrange 乗数法 [Cuomo & Contrafatto 00]
  - 非線形計画法 [Krabbenhøft, Lyamin & Sloan 07]
  - 非線形相補性問題  
[Tin-Loi & Pang 93] [Tin-Loi & Xia 01] [Hu, Soh, Chen, Li & Lin 07]
  - Bi-potential 法 [Hjiaj, Fortin & de Saxcé 03]

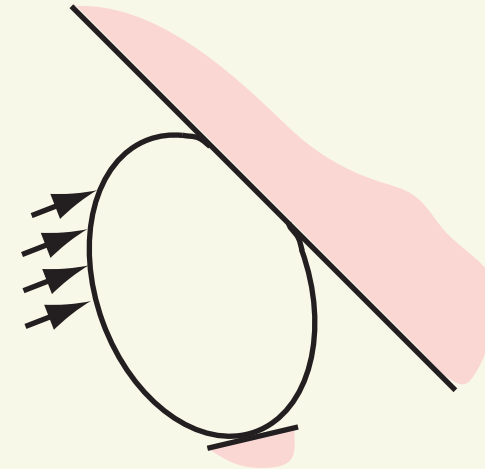
- Return-mapping [Simo & Taylor 85, 86]
- 数理計画法
  - 降伏条件を多面体で近似  
→ 凸2次計画問題 [Mier 68, 69] [Capurso & Maier 70]
  - 拡張 Lagrange 乗数法 [Cuomo & Contrafatto 00]
  - 非線形計画法 [Krabbenhøft, Lyamin & Sloan 07]
  - 非線形相補性問題  
[Tin-Loi & Pang 93] [Tin-Loi & Xia 01] [Hu, Soh, Chen, Li & Lin 07]
  - Bi-potential 法 [Hjiaj, Fortin & de Saxcé 03]
  - 2次錐計画法

# Nonsmooth mechanics の例：片側接触

- 弾性体と剛体との接触



初期状態



釣合状態

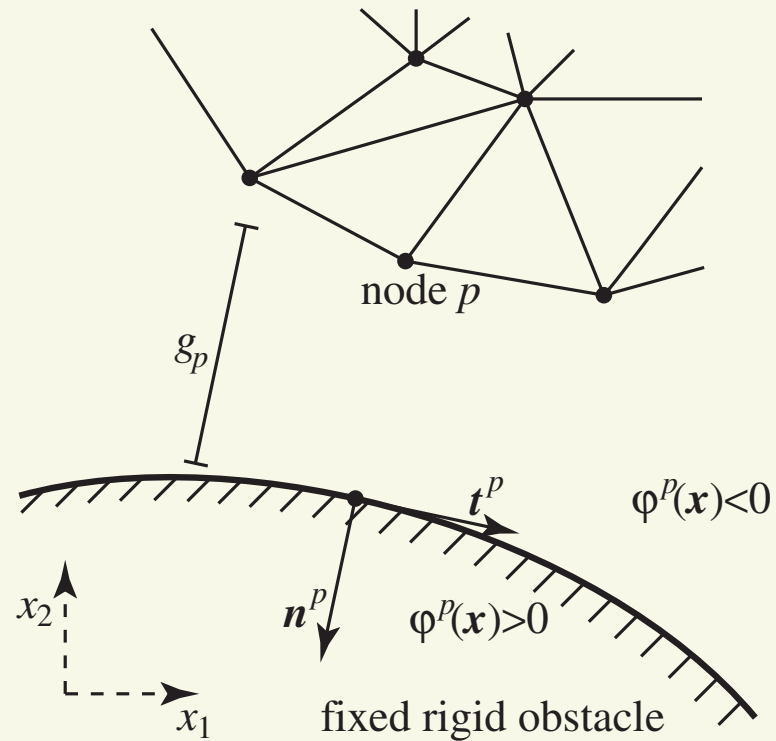
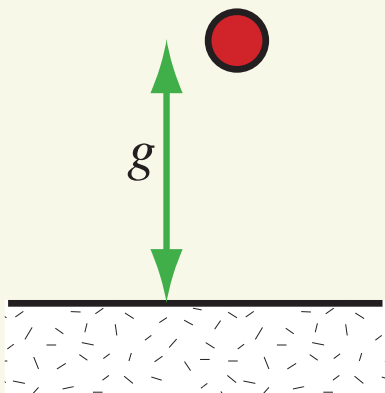
- 接触するか？
- 接触するならば，どの範囲で接触するか？

# Nonsmooth mechanics の例：片側接触

- $g$ : ギャップ       $r_n$ : 反力 (の法線方向成分)

$$g > 0 \quad \Rightarrow \quad r_n = 0 \quad : \text{free}$$

$$r_n < 0 \quad \Rightarrow \quad g = 0 \quad : \text{contact}$$

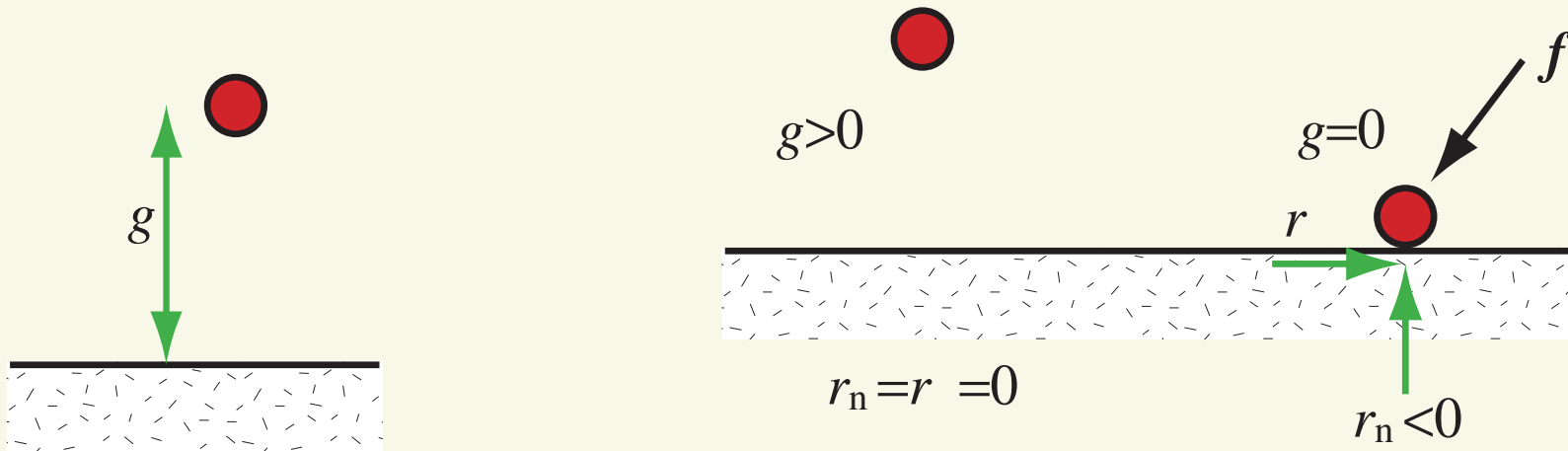


# Nonsmooth mechanics の例：片側接触

- $g$ : ギャップ  $r_n$ : 反力 (の法線方向成分)

$$g > 0 \Rightarrow r_n = 0 \quad : \text{free}$$

$$r_n < 0 \Rightarrow g = 0 \quad : \text{contact}$$



$g \geq 0$  : 非貫通条件 (non-penetration)

$r_n \leq 0$  : 非固着条件 (non-adhesion) — 圧縮力

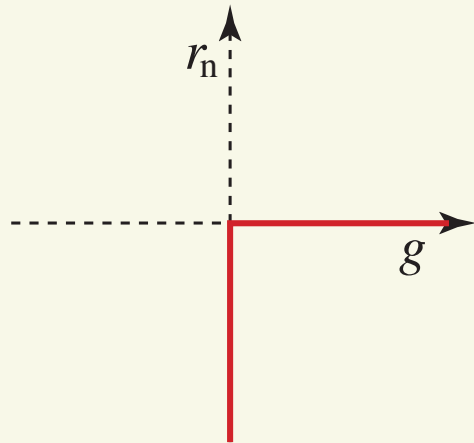


# Nonsmooth mechanics の例：片側接触

$$g > 0 \quad \Rightarrow \quad r_n = 0 \quad : \text{free}$$

$$r_n < 0 \quad \Rightarrow \quad g = 0 \quad : \text{contact}$$

$$g \geq 0, \quad r_n \leq 0 \quad : \text{非貫通, 非固着}$$

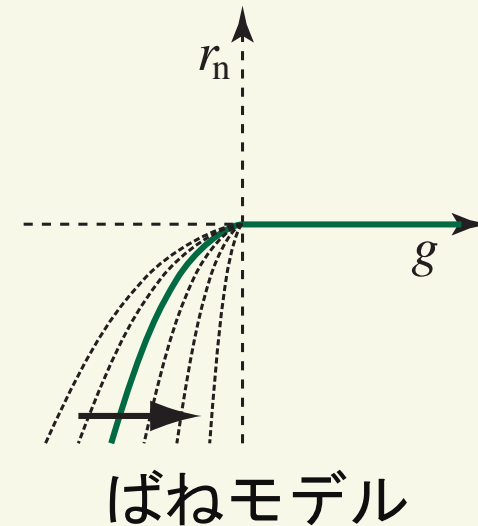


nonsmooth law

- 本来の支配則は nonsmooth

# Nonsmooth mechanics の例：片側接触

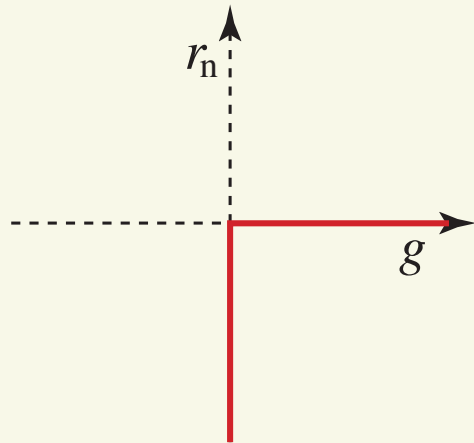
$$\begin{aligned} g > 0 &\Rightarrow r_n = 0 && : \text{free} \\ r_n < 0 &\Rightarrow g = 0 && : \text{contact} \\ g \geq 0, \quad r_n \leq 0 &&& : \text{非貫通, 非固着} \end{aligned}$$



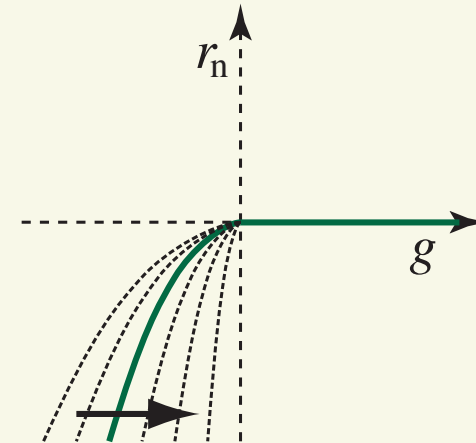
- 本来の支配則は nonsmooth
- 近似手法：なめらかな関数で近似

# Nonsmooth mechanics の例：片側接触

$$\begin{aligned} g > 0 &\Rightarrow r_n = 0 && : \text{free} \\ r_n < 0 &\Rightarrow g = 0 && : \text{contact} \\ g \geq 0, \quad r_n \leq 0 &&& : \text{非貫通, 非固着} \end{aligned}$$



nonsmooth law

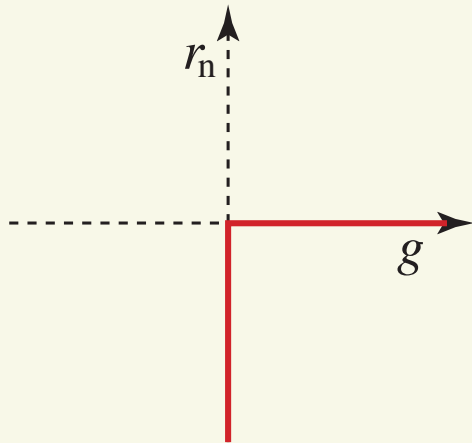


ばねモデル

- 本来の支配則は nonsmooth ← 一切の近似なく取り扱いたい  
= nonsmooth mechanics の方法論
- 近似手法：なめらかな関数で近似

# Nonsmooth mechanics の例：片側接触

$$\begin{aligned} g > 0 &\Rightarrow r_n = 0 && : \text{free} \\ r_n < 0 &\Rightarrow g = 0 && : \text{contact} \\ g \geq 0, \quad r_n \leq 0 &&& : \text{非貫通, 非固着} \end{aligned}$$



- “場合分け” を含まない定式化

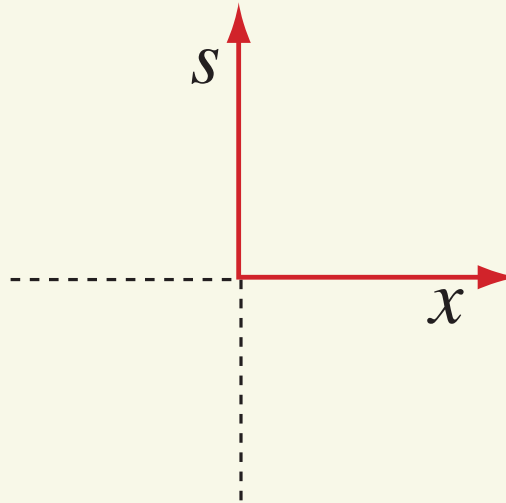
$$\begin{aligned} g \geq 0, \quad r_n \leq 0 \\ gr_n = 0 \end{aligned}$$

(相補性条件)

# 相補性条件

- 相補性条件の標準形

$$x \geq 0, \quad s \geq 0, \quad xs = 0$$



- $xs = 0 \iff x$  と  $s$  の少なくとも片方は 0
- (2つの不等式制約) & (相補性条件)
  - Nonsmooth mechanics の基本的な道具
  - 最適化問題の最適性条件 (KKT 条件)

# 線形計画法の拡張

- 線形計画問題：

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^m b_j y_j \\ \text{s. t.} & \mathbf{c} - \sum_{j=1}^m y_j \mathbf{a}_j \geq \mathbf{0} \end{array}$$

# 線形計画法の拡張

- 線形計画問題 :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^m b_j y_j \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{c} - \sum_{j=1}^m y_j \mathbf{a}_j \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- 半正定値計画問題 :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^m b_j y_j \\ \text{s. t.} \quad & C - \sum_{j=1}^m y_j A_j \succeq O \quad [\text{半正定値}] \end{aligned}$$

- $A_1, \dots, A_m, C$  は 対称行列
- $S$  が半正定値  $\Leftrightarrow S$  の固有値が全て 0 以上

# 線形計画法の拡張

- 線形計画問題 :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^m b_j y_j \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{c} - \sum_{j=1}^m y_j \mathbf{a}_j \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- 2次錐計画問題 :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^m b_j y_j \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{p}_l^T \mathbf{y} + q_l \geq \|\mathbf{c}_l - A_l \mathbf{y}\| \quad (l = 1, \dots, k) \end{aligned}$$

- 線形計画  $\subseteq$  2次錐計画  $\subseteq$  半正定値計画
  - すべて凸最適化問題
  - 主双対内点法で多項式時間で解ける



## 相補性条件の拡張

- 相補性条件 :

$$x \geq 0, \quad s \geq 0, \quad xs = 0$$

- いずれも“(2つの不等式) & (内積 = 0)”の形

# 相補性条件の拡張

- 相補性条件 :

$$x \geq 0, \quad s \geq 0, \quad xs = 0$$

- 2次錐相補性 :

$$x_0 \geq \|\mathbf{x}_1\|, \quad s_0 \geq \|\mathbf{s}_1\|, \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_0 \\ \mathbf{s}_1 \end{bmatrix} = 0$$

- いずれも“(2つの不等式) & (内積 = 0)”の形

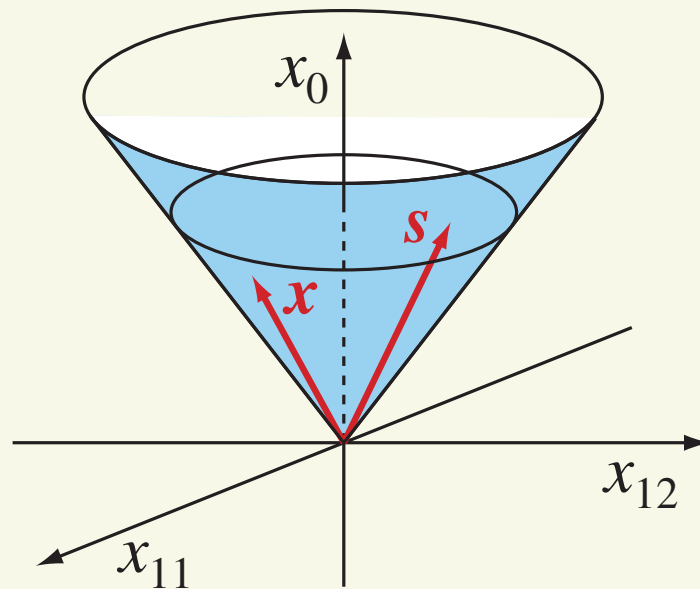
# 相補性条件の拡張

- 相補性条件 :

$$x \geq 0, \quad s \geq 0, \quad xs = 0$$

- 2次錐相補性 :

$$x_0 \geq \|\mathbf{x}_1\|, \quad s_0 \geq \|\mathbf{s}_1\|, \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_0 \\ \mathbf{s}_1 \end{bmatrix} = 0$$



# 相補性条件の拡張

- 相補性条件 :

$$x \geq 0, \quad s \geq 0, \quad xs = 0$$

- 2次錐相補性 :

$$x_0 \geq \|\mathbf{x}_1\|, \quad s_0 \geq \|\mathbf{s}_1\|, \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_0 \\ \mathbf{s}_1 \end{bmatrix} = 0$$

- 半正定値相補性 :

$$X \succeq O, \quad S \succeq O, \quad X \bullet S = 0$$

- 内積  $X \bullet S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m X_{ij} S_{ij}$
- “下”の方が記述能力が高い : 複雑な条件を表現できる
- いずれも“(2つの不等式) & (内積 = 0)”の形

## 解法：内点法

- $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}) = 0,$   
 $x_i \geq 0, \quad s_i \geq 0, \quad x_i s_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$
- 相補性問題 ( $\supset$  最適化問題の最適性条件) を どう解くか

## 解法：内点法

- $$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}) = \mathbf{0},$$
$$x_i \geq 0, \quad s_i \geq 0, \quad x_i s_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

- $\nu > 0$  をパラメータとして

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}) = \mathbf{0},$$
$$x_i s_i = \nu \quad (i = 1, \dots, n),$$
$$x_i > 0, \quad s_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

# 解法：内点法

- $$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}) = 0,$$
$$x_i \geq 0, \quad s_i \geq 0, \quad x_i s_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

- $\nu > 0$  をパラメータとして

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}) = 0, \quad (\diamond 1)$$

$$x_i s_i = \nu \quad (i = 1, \dots, n), \quad (\diamond 2)$$

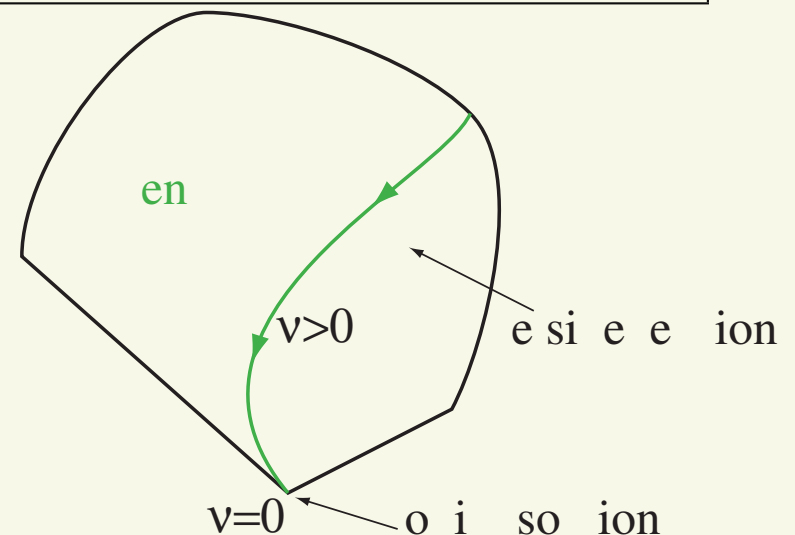
$$x_i > 0, \quad s_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (\spadesuit)$$

## 中心パス

- 実行可能領域の内部を通り,
- $\nu \rightarrow 0$  で解に収束するパス

## 内点法

- 中心パスを辿る方法



## 解法：内点法

- $$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}) = 0,$$
$$x_i \geq 0, \quad s_i \geq 0, \quad x_i s_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

- $\nu > 0$  をパラメータとして

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}) = 0, \quad (\diamond 1)$$

$$x_i s_i = \nu \quad (i = 1, \dots, n), \quad (\diamond 2)$$

$$x_i > 0, \quad s_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (\spadesuit)$$

- 内点 (つまり  $(\spadesuit)$  を満たす点) を初期点として,
- $(\diamond 1)$  &  $(\diamond 2)$  に Newton 法を適用 → 探索方向を定める
- $(\spadesuit)$  を満たす長さだけ進む

以上を繰り返す

- “場合分け (試行錯誤)” を含まない解法



# 弾塑性問題

- 微小変形
- 準静的な载荷
- von Mises 降伏条件
- ひずみ硬化
  - 等方硬化
  - 移動硬化
- 場合分けなし で解きたい

# 降伏条件と関連流れ則

- 降伏条件 (von Mises)  $f(\boldsymbol{\sigma}) = \|\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y \leq 0$ 
  - 偏差応力  $\text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}$
- ひずみの分解  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p$  (“弾性ひずみ” + “塑性ひずみ”)
- 関連流れ則
  - 塑性ひずみ速度の方向は

$$\exists \alpha \geq 0 : \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \alpha \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

# 降伏条件と関連流れ則

- 降伏条件 (von Mises)  $f(\boldsymbol{\sigma}) = \|\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y \leq 0$ 
  - 偏差応力  $\text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}$
- ひずみの分解  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p$  (“弾性ひずみ” + “塑性ひずみ”)
- 関連流れ則
  - 塑性ひずみ速度の方向は

$$\exists \alpha \geq 0 : \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \alpha \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

- 相補性条件 :  $\alpha \geq 0, f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \alpha f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ 
  - 負荷 :  $\alpha > 0, f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$
  - 除荷 :  $\alpha = 0, f(\boldsymbol{\sigma}) < 0$

## 降伏条件と関連流れ則：2次錐相補性条件

- 降伏条件 (von Mises)  $f(\boldsymbol{\sigma}) = \|\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y \leq 0$
- 関連流れ則  $\exists \alpha \geq 0 : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \alpha \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$
- 相補性条件  $\alpha \geq 0, f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \alpha f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$

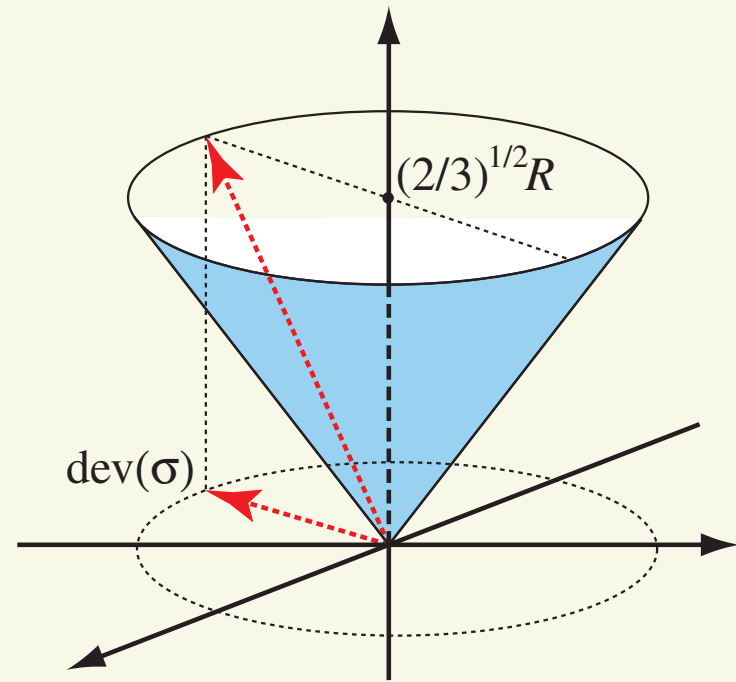
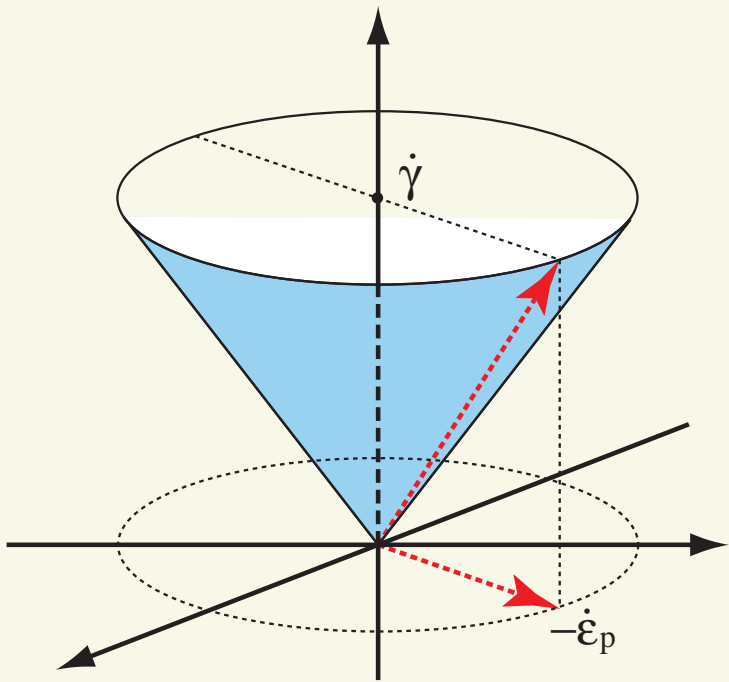
これらの条件が，2次錐相補性条件 で記述できる：

$$\dot{\gamma} \geq \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p\| \quad (2 \text{ 次錐})$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}R \geq \|\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})\| \quad (2 \text{ 次錐})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ -\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}}R \\ \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{相補性})$$

# 降伏条件と関連流れ則：2次錐相補性条件



これらの条件が，2次錐相補性条件で記述できる：

$$\dot{\gamma} \geq \|-\dot{\epsilon}_p\| \quad (2 \text{ 次錐})$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}R \geq \|\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})\| \quad (2 \text{ 次錐})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ -\dot{\epsilon}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}}R \\ \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{相補性})$$

## 増分問題 (等方硬化)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e,$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e + \text{dev}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p) = \frac{1}{2}(\nabla \dot{\mathbf{u}}^T + \nabla \dot{\mathbf{u}}),$$

$$-\text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) = \underline{\mathbf{p}},$$

$$\boldsymbol{\eta} = \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}), \quad R = R_0 + \sqrt{\frac{2}{3}} H_i \dot{\gamma},$$

$$\dot{\gamma} \geq \|-\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p\|, \quad \sqrt{\frac{2}{3}} R \geq \|\boldsymbol{\eta}\|, \quad (\diamond)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ -\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} R \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = 0. \quad (\spadesuit)$$

- $(\diamond)$  : (二つの) 2次錐制約
  - ひずみと応力の制約が対称な形
- $(\spadesuit)$  : 相補性条件

## 増分問題 (等方硬化)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e,$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e + \text{dev}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p) = \frac{1}{2}(\nabla \dot{\mathbf{u}}^T + \nabla \dot{\mathbf{u}}),$$

$$-\text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) = \underline{\mathbf{p}},$$

$$\boldsymbol{\eta} = \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}), \quad R = R_0 + \sqrt{\frac{2}{3}} H_i \dot{\gamma},$$

$$\dot{\gamma} \geq \|-\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p\|, \quad \sqrt{\frac{2}{3}} R \geq \|\boldsymbol{\eta}\|, \quad (\diamond)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ -\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} R \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = 0. \quad (\spadesuit)$$

- $(\diamond)$  &  $(\spadesuit)$  以外はすべて線形制約
- 非線形性 & 場合分けを  $(\diamond)$  &  $(\spadesuit)$  に“閉じ込めた”定式化

## 増分問題 (等方硬化 + 移動硬化)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e,$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e + \text{dev}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p) = \frac{1}{2}(\nabla \dot{\mathbf{u}}^T + \nabla \dot{\mathbf{u}}),$$

$$-\text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) = \underline{\mathbf{p}},$$

$$\boldsymbol{\eta} = \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\beta}, \quad R = R_0 + \sqrt{\frac{2}{3}} H_i \dot{\gamma}, \quad \mu = \frac{2}{3} H_k \dot{\hat{\gamma}},$$

$$\dot{\gamma} \geq \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p\|, \quad \sqrt{\frac{2}{3}} R \geq \|\boldsymbol{\eta}\|, \quad \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ -\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} R \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = 0, \quad (\diamond \spadesuit 1)$$

$$\dot{\hat{\gamma}} \geq \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p\|, \quad \mu \geq \|\dot{\boldsymbol{\beta}}\|, \quad \begin{bmatrix} \dot{\hat{\gamma}} \\ -\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} \end{bmatrix} = 0. \quad (\diamond \spadesuit 2)$$

- 背応力の増分  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$  は  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p$  に平行 (関連流れ則)
- 二組の 2 次錐相補性条件
  - それ以外は すべて線形制約



# 全ポテンシャルエネルギー最小化 (離散化 後)

- 等方硬化

$$\begin{aligned} \min_{\dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p, \dot{\gamma}} \quad & \sum_r \left( \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{er} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{er} + \boldsymbol{\sigma}_{lr} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{er} + \sqrt{\frac{2}{3}} R_{lr} \dot{\gamma}_r + \frac{1}{3} H_i \dot{\gamma}_r^2 \right) \\ & - \sum_{j \in \Gamma_N} \underline{p}_j \dot{u}_j \\ \text{s. t.} \quad & \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{er} + \text{dev}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{pr}) = B_r \dot{\mathbf{u}} \\ & \dot{\gamma}_r \geq \| -\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{pr} \| \\ & \dot{u}_j = \underline{u}_j, \quad \forall j \in \Gamma_D \end{aligned}$$

- 凸最適化問題

- 目的関数 : 凸 2 次関数
- 制約条件 : 2 次錐制約 (と線形制約)
- 主双対内点法で多項式時間で解ける

# 弾塑性問題 — 全ポテンシャルエネルギー最小化

- 移動硬化

$$\begin{aligned} \min_{\dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}_k} \quad & \sum_r \left( \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{er} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{er} + \boldsymbol{\sigma}_{lr} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{er} + \boldsymbol{\beta}_{lr} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{pr} \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{2}{3}} R \dot{\gamma}_r + \frac{1}{3} H_k \dot{\gamma}_{kr}^2 \right) - \sum_{j \in \Gamma_N} \underline{p}_j \dot{u}_j \\ \text{s. t.} \quad & \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{er} + \text{dev}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{pr}) = B_r \dot{\mathbf{u}} \\ & \dot{\gamma}_r \geq \|-\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{pr}\|, \quad \dot{\gamma}_{kr} \geq \|-\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{pr}\| \\ & \dot{u}_j = \underline{u}_j, \quad \forall j \in \Gamma_D \end{aligned}$$

- 凸最適化問題

- 目的関数：凸2次関数
- 制約条件：2次錐制約

# 弾塑性問題 — 全ポテンシャルエネルギー最小化

- 移動硬化

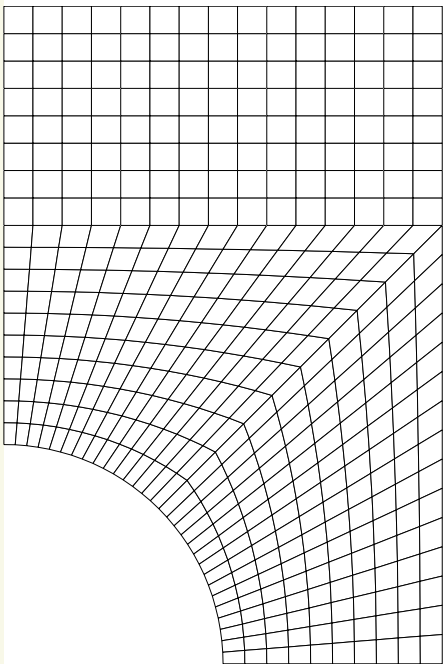
$$\begin{aligned} \min_{\dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}_k} \quad & \sum_r \left( \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{er} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{er} + \boldsymbol{\sigma}_{lr} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{er} + \boldsymbol{\beta}_{lr} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{pr} \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{2}{3}} R \dot{\gamma}_r + \frac{1}{3} H_k \dot{\gamma}_{kr}^2 \right) - \sum_{j \in \Gamma_N} \underline{p}_j \dot{u}_j \\ \text{s. t.} \quad & \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{er} + \text{dev}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{pr}) = B_r \dot{\mathbf{u}} \\ & \dot{\gamma}_r \geq \|-\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{pr}\|, \quad \dot{\gamma}_{kr} \geq \|-\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{pr}\| \\ & \dot{u}_j = \underline{u}_j, \quad \forall j \in \Gamma_D \end{aligned}$$

- 凸最適化問題

- 目的関数：凸2次関数
- 制約条件：2次錐制約
- → “等方硬化 & 移動硬化” の組合せ則も同様

## 例題 (2次元)

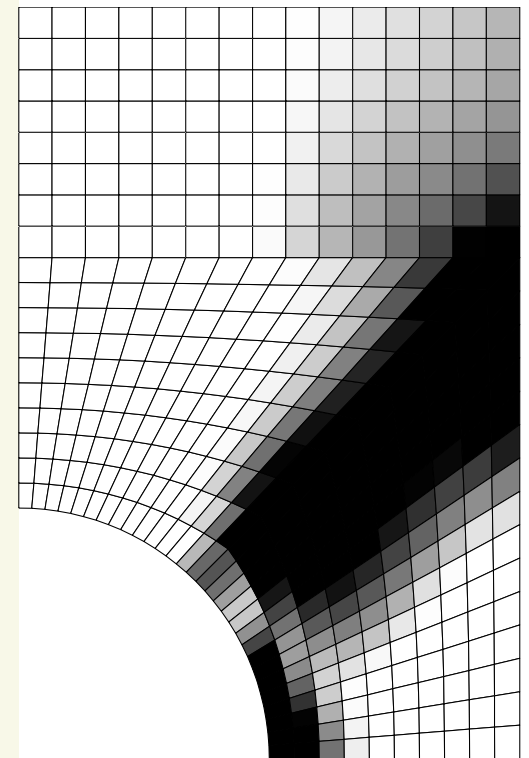
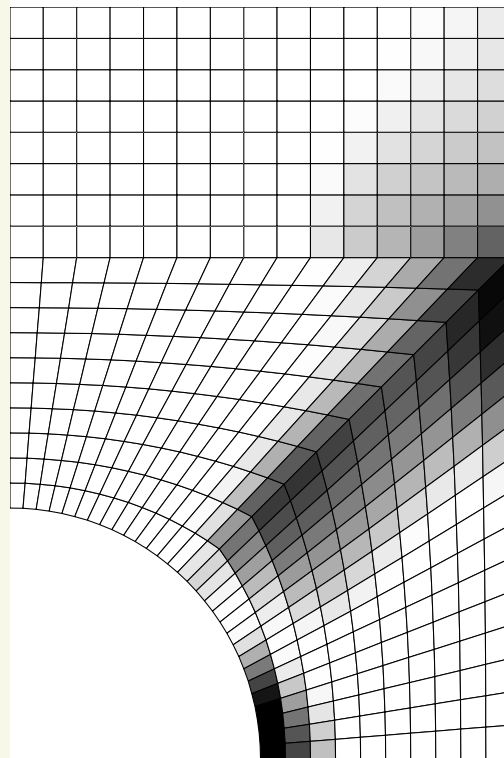
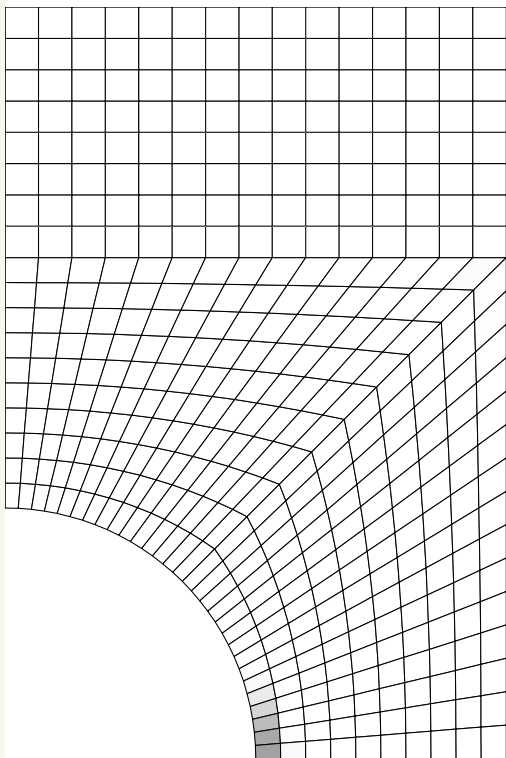
- 穴あき平板



- 対称性を考慮して 1/4 を解析
- “等方硬化 & 移動硬化” の 組合せ硬化則
- 鉛直方向の強制変位
- 20 節点セレンディピティ6 面体要素
- 9549 自由度, 3360 積分点

## 例題 (2次元)

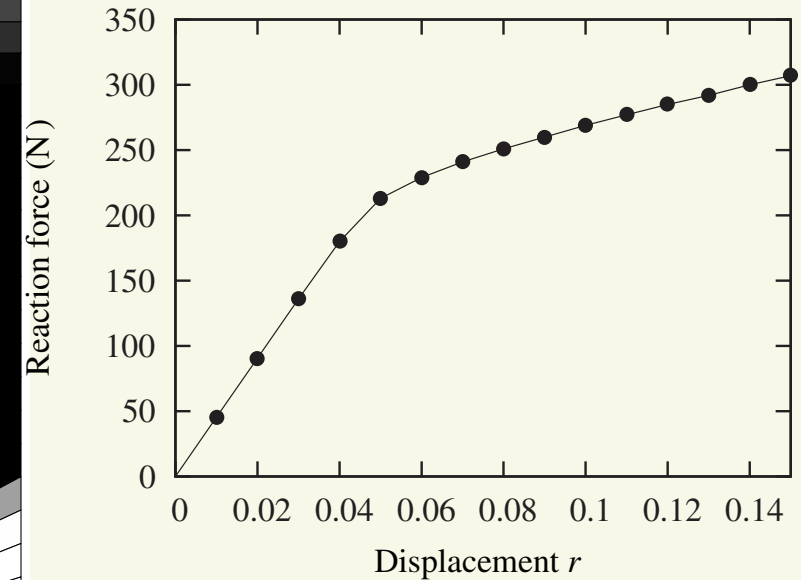
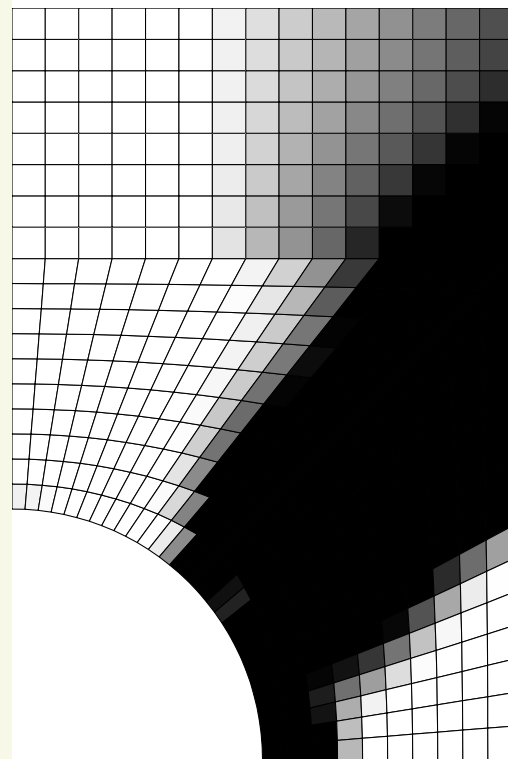
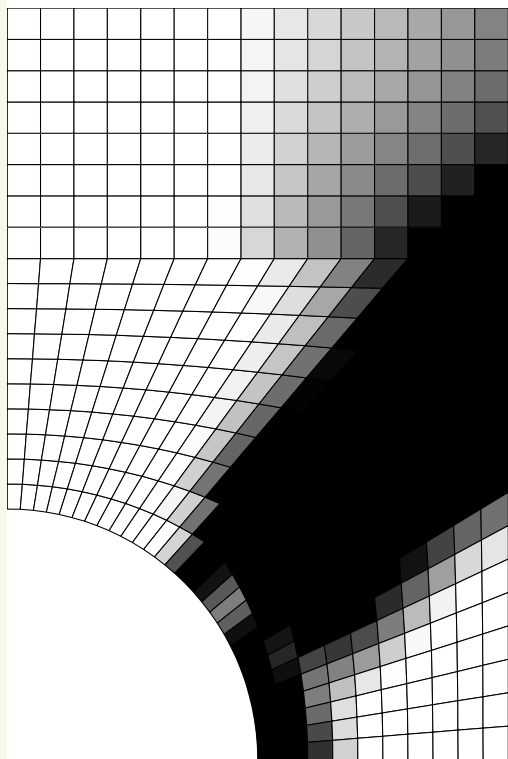
- 穴あき平板



- 塑性ひずみの進展

# 例題 (2次元)

- 穴あき平板

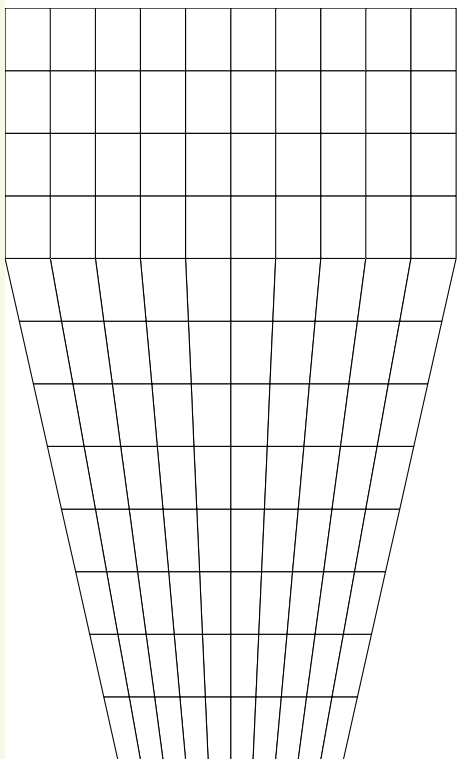


荷重-変位 曲線

- 塑性ひずみの進展 (続き)

## 例題 (3次元)

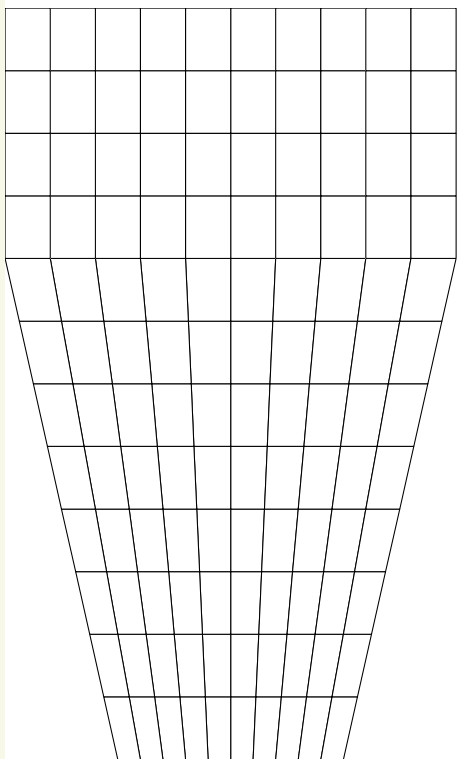
- テーパー付き円柱



- 対称性を考慮して 1/2 を解析
- “等方硬化 & 移動硬化” の 組合せ硬化則
- 鉛直方向の強制変位
- 20 節点セレンディピティ6 面体要素
- 6195 自由度, 3840 積分点

## 例題 (3次元)

- テーパー付き円柱



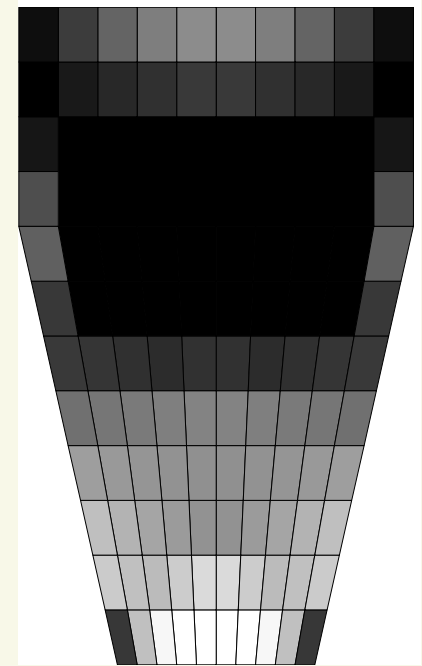
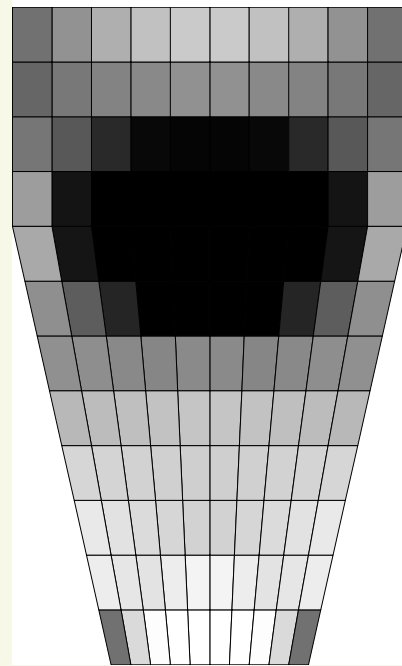
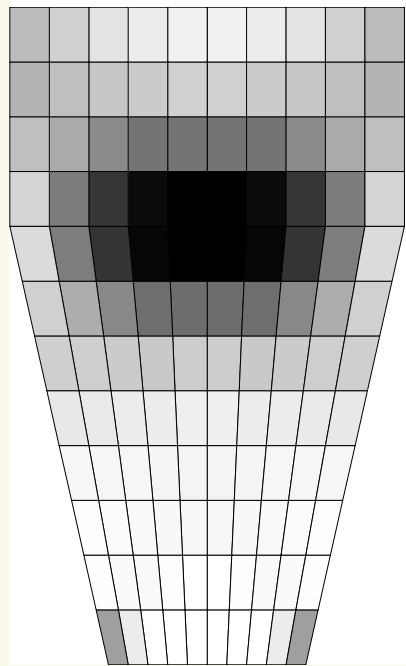
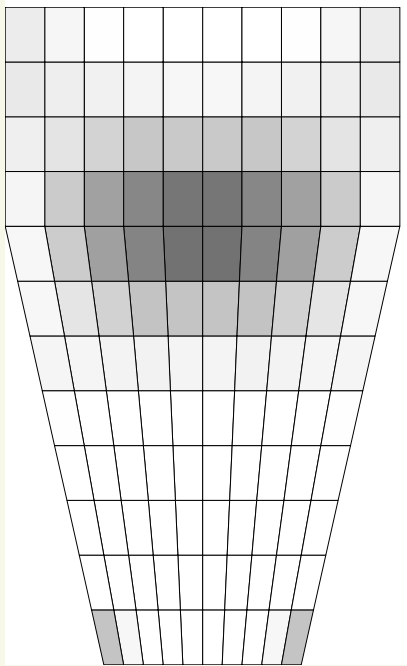
- 対称性を考慮して 1/2 を解析
- “等方硬化 & 移動硬化” の 組合せ硬化則
- 鉛直方向の強制変位
- 20 節点セレンディピティ6 面体要素
- 6195 自由度, 3840 積分点

- 2次錐計画問題としての定式化では, 問題の難しさは2次元でも3次元でも同じ



# 例題 (3次元)

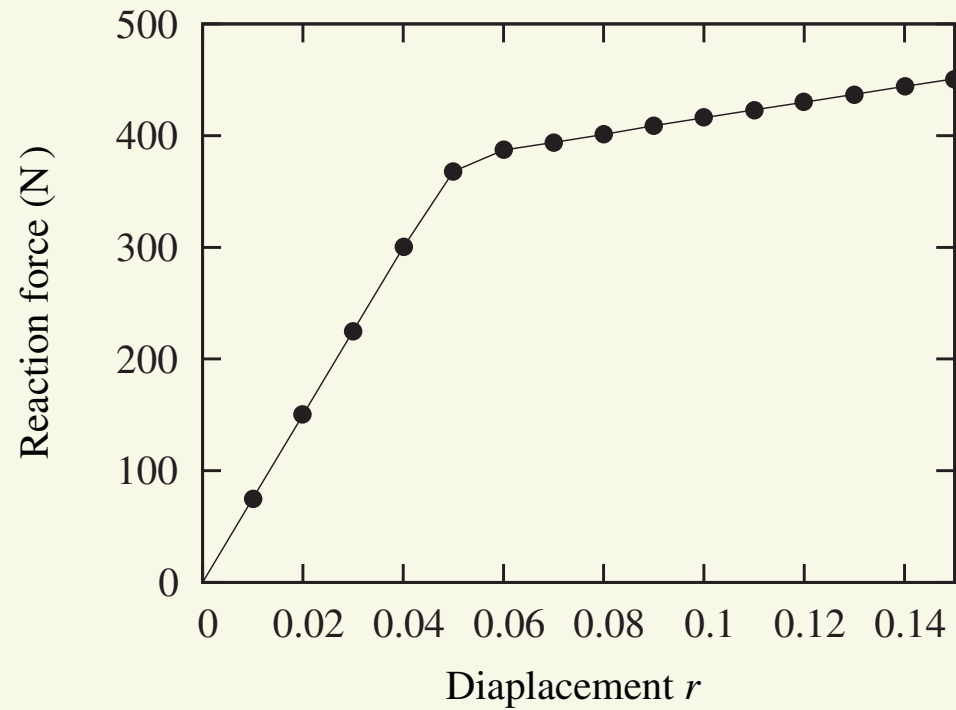
- テーパー付き円柱



- 塑性ひずみの進展

## 例題 (3次元)

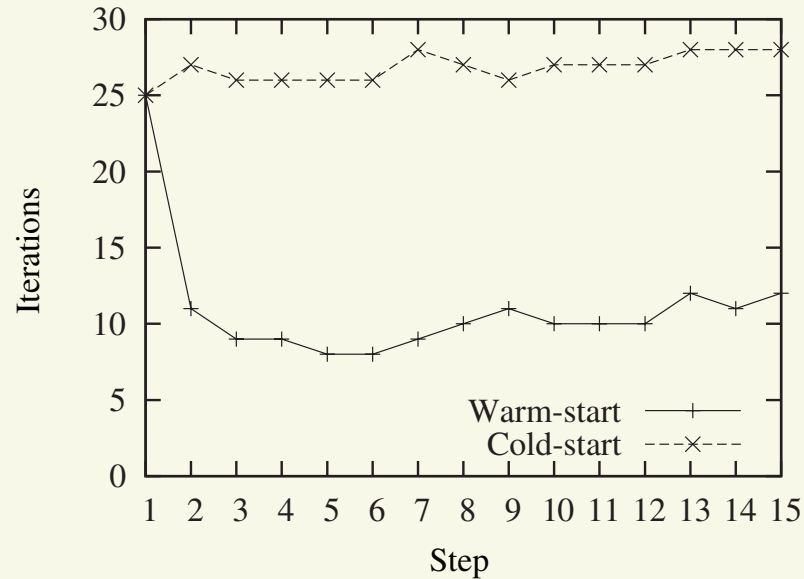
- テーパー付き円柱



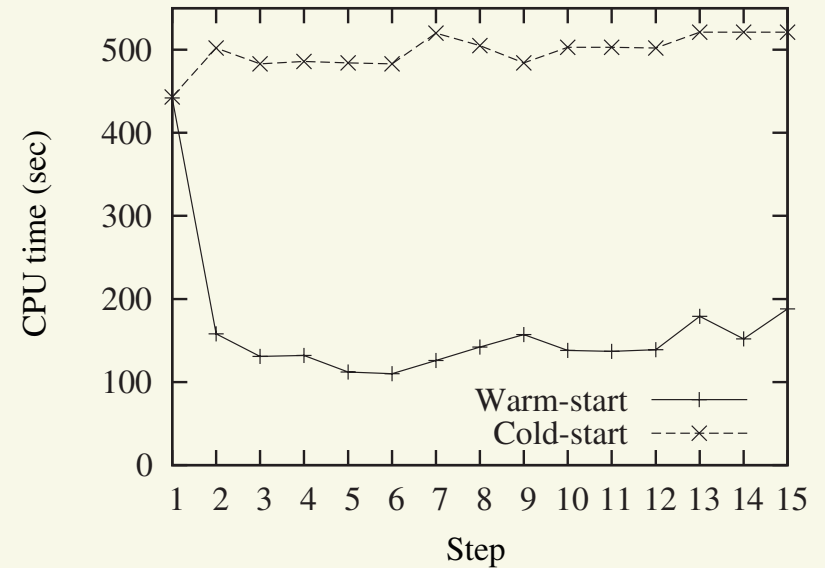
荷重-変位 曲線

# 例題 (3次元)

- テイパー付き円柱



内点法の反復回数



計算時間

- 内点法のウォームスタート法を提案

- 一つ前の問題の解の情報を利用して、よい初期解を作り、反復回数を減らす

# まとめ

- 弾塑性問題
  - von Mises の降伏条件, 等方硬化 + 移動硬化
- 場合分け のない定式化
  - 2次錐制約 & 相補性条件
  - 凸計画問題 → 主双対内点法 (収束性・多項式性の保証)
  - ウォームスタート法
- References:
  - K. Yonekura, Y. Kanno: “Second-order cone programming with warm start for elastoplastic analysis with von Mises yield criterion.”  
*Optimization and Engineering*, DOI: 10.1007/s11081-011-9144-4.
  - Kanno, Y.: *Nonsmooth Mechanics and Convex Optimization*.  
CRC Press, Boca Raton (2011).